

# **PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL**

- A.- [Problemas generales](#)
- B.- [Problemas con porcentajes](#)
- C.- [Problemas de dietas](#)
- D.- [Problemas para profundizar](#)

## **A.- PROBLEMAS GENERALES**

Ejercicio 1.- En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas. Las sillas grandes necesitan  $4 \text{ m}^2$  de madera y las pequeñas  $3 \text{ m}^2$ . El fabricante necesita construir, al menos, tres sillas grandes y el número de sillas pequeñas debe ser al menos el doble que las de grandes. Se dispone de  $60 \text{ m}^2$  de madera y los beneficios son de 20€ y 35€ por silla pequeña y grande, respectivamente. ¿Cuántas sillas de cada tipo se deben fabricar para obtener el beneficio máximo? ¿Cuánto ganaremos para dicha cantidad de sillas?

Ejercicio 2.- Una empresa construye en dos factorías  $F_1$  y  $F_2$  tres tipos de barcos R, S y T. La primera factoría construye en un mes: 1 barco de tipo R, 1 de tipo S y 5 de tipo T, siendo su coste de mantenimiento mensual 6000€, y la segunda factoría construye en un mes: 1 barco de tipo R, 2 de tipo S y 1 de tipo T, siendo su coste mensual de 3000€. La empresa se ha comprometido a entregar a cierto club náutico 3 barcos de tipo R, 12 de tipo S y 15 de tipo T. ¿Cuántos meses deberá trabajar cada factoría con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con mínimo coste? ¿Puede suprimirse alguna restricción sin que varíe el problema?

-Solución:

Debe de trabajar 2 meses la primera factoría y 5 meses la segunda factoría.  
Puede suprimirse la restricción relativa a los barcos de tipo R, ya que, no influye para la resolución del problema.

Ejercicio 3.- Un grupo de 114 alumnos prepara un viaje al Museo de las Ciencias. Para ello dispone de 8 vehículos de 6 plazas y otros 8 de 15 plazas, pero solo se disponen de 10 conductores. El viaje con el vehículo de 6 plazas cuesta 8€ por persona y con el de 15 plazas 21€ por persona. Calcula cuántos vehículos de cada tipo deben utilizar los alumnos para que el coste del transporte sea mínimo. ¿A cuánto asciende el precio del transporte?

-Solución:

Se deben utilizar 4 vehículos de 6 plazas y 6 vehículos de 15 plazas.  
El precio asciende a 1580€.

Ejercicio 4.- Una empresa dispone de 300 hectáreas para el cultivo de hortalizas y remolacha. Por el problema de la sequía sólo se dispone de 400 dm<sup>2</sup> de agua, y cada hectárea de hortaliza necesita 1'5 dm<sup>2</sup> de agua, en tanto que cada hectárea de remolacha necesita 1 dm<sup>2</sup> de agua. Para atender a necesidades mínimas hay que plantar obligatoriamente al menos 100 hectáreas de hortalizas y 50 de remolacha. Cada hectárea de hortalizas produce unos beneficios de 25.000€ y cada hectárea de remolacha da unos beneficios de 20.000€. Averiguar cuántas hectáreas hay que plantar de hortalizas y de remolacha para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

-Solución: 200 hectáreas de hortaliza y 100 hectáreas de remolacha.

Ejercicio 5.- Una máquina produce dos marcas de comida para perros, A y B a partir de carne y harina, con los datos de producción recogidos en la tabla. ¿Cuántas latas deben producirse por hora de cada marca para maximizar el beneficio?.

|                                         | Carne        | Harina       | Beneficios |
|-----------------------------------------|--------------|--------------|------------|
| Marca A                                 | 200 gr./lata | 100 gr./lata | 30 €/lata  |
| Marca B                                 | 140 gr./lata | 160 gr./lata | 24 €/lata  |
| Máximo admitido por hora por la máquina | 78 Kg.       | 48 Kg.       |            |

-Solución: 320 latas de la marca A y 100 latas de la marca B.

Ejercicio 6.- Una fábrica de coches va a lanzar al mercado dos nuevos modelos (uno básico y otro de lujo). El coste de fabricación del modelo básico es de 6.000€, y el del modelo de lujo 9.000€, disponiendo para esta operación de lanzamiento de un presupuesto de 360.000€. Para evitar riesgos, de momento se cree conveniente lanzar al menos tantos coches del modelo básico como del modelo de lujo y, en todo caso, no fabricar más de 45 coches del básico.

- ¿Cuántos coches puede fabricar de cada modelo?
- ¿Cuántos le interesa si su objetivo es maximizar el número total de coches fabricados? ¿Agota el presupuesto disponible?

-Solución:

- Todos los puntos de coordenadas enteras situados dentro de la región factible.
- Debe fabricar 45 del modelo básico y 10 del modelo de lujo.

Ejercicio 7.- Un fabricante de motocicletas lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A, a un precio de 9.000€ y el modelo B en 12.000€. La oferta está limitada por las existencias, que son de 20 motocicletas del modelo A y 10 del B, queriendo vender, al menos, tantas unidades del modelo A como del B. Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos, de 36.000€. ¿Cuántas motocicletas deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos?. ¿Cuál es el beneficio?

-Solución: Deberá vender 20 del modelo A y 10 del B, ganando 300.000€.

Ejercicio 8.- En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva, y además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1€ y de uno de girasol de 0,50€, se pide:

- a) ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo?  
¿Y para que el gasto sea máximo?
- b) Si varían los gastos de almacenaje de manera que el gasto del almacenaje de un bidón para los dos tipos de aceite asciende a 2€. En esta situación, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que sea máximo?

-Solución:

- a) - Mínimo para 20 de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva.  
- Máximo para 20 de aceite de girasol y 130 de aceite de oliva.
- b) - Mínimo para 20 bidones de girasol y 40 bidones de oliva.  
- Máximo en cualquier punto del segmento comprendido entre (20,130) y (100,50), con coordenadas enteras.

Ejercicio 9.- Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1gr. de oro y 3gr. de plata y se vende a 25€. La de tipo B se vende a 30€ y lleva 1'5gr. de oro y 1gr. de plata. Si solo se dispone de 750 gr. de oro y 1200 gr. de plata, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio? Si vende las joyas de tipo A, a 60€ y la de tipo B a 20€, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo?

- Solución: Se alcanza el máximo fabricando 300 joyas de cada tipo, ganando un total de 16500€.

Para la segunda cuestión la respuesta es que alcanzará el máximo en cualquier punto del segmento comprendido entre los puntos C y D, con coordenadas enteras, ganando un total de 24000€.

Ejercicio 10.- Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble del de electricistas. En total hay disponibles 30 mecánicos y 20 electricistas. El beneficio de la empresa por jornada es de 150€ por electricista y 120€ por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?, ¿A cuánto asciende ese beneficio?

-Solución: Se alcanza el máximo contratando un total de 20 electricistas y 30 mecánicos con un beneficio de 6600€.

## **B. PROBLEMAS CON PORCENTAJES**

Ejercicio 1.- Para abonar una parcela de huerta se necesitan por lo menos 8 Kg. de nitrógeno y 12 Kg. de fósforo. Se dispone de un producto A cuyo precio es de 30€/Kg. y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20% de nitrógeno y un 20% de fósforo, y cuyo precio es de 40€/Kg. Quien me vende el producto me obliga a que la cantidad que compre de B sea mayor o igual que la mitad de la cantidad que compro de A. ¿Qué cantidades se deben tomar de A y B para abonar la parcela con el menor gasto posible?

-Solución: Se minimizará el coste con la adquisición de 20kg de producto A y 30kg de producto B, teniendo que pagar un total de 1800€.

Ejercicio 2.- Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 Kg. de café del tipo C y 800 Kg. de café del tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La del tipo A, que consta de  $\frac{2}{3}$  de café de tipo C y  $\frac{1}{3}$  de tipo K en la que gana 22€ por Kg., y la del tipo B, que consta de  $\frac{1}{3}$  del tipo C y  $\frac{2}{3}$  del tipo K en la que gana 26€ por Kg. Hallar la cantidad de mezcla que la casa debe preparar de cada clase para que la ganancia sea máxima.

- Solución: 600Kg. de mezcla de tipo A y 900 Kg. de tipo B.

Ejercicio 3.- Una empresa de alimentación fabrica dos tipos de pizzas: normal y especial. De los 1,25 Kg. de cada pizza normal, un 80% es masa y un 20% recubrimiento, y su venta rinde un beneficio de 2,5€, mientras que una pizza especial, de 1,5 Kg., necesita dos partes de masa por una parte de recubrimiento, pero deja unos beneficios de 4€. La empresa dispone diariamente de 150 Kg. de masa y 50 Kg. de recubrimiento. Además, la empresa no puede vender (al día) más de 125 pizzas de cada clase. ¿Cuántas pizzas normales y cuántas especiales debe fabricar (y vender) diariamente a fin de que el beneficio sea el máximo posible?

-Solución: Se deben hacer 100 pizzas normales y 50 especiales.

### **C.- PROBLEMAS DE DIETAS**

**Ejercicio 1.-** Se quiere elaborar una dieta para el ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg. de vitamina A, 3 mg. de vitamina B, 30 mg. de la C y 2 mg. de la D.

Para ello, se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kilo es, para ambos, de 0,30€ y cuyo contenido vitamínico en miligramos por kilo es el siguiente:

|   | A | B | C   | D |
|---|---|---|-----|---|
| P | 1 | 1 | 20  | 2 |
| Q | 1 | 3 | 7,5 | 0 |

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?

-Solución: Todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos (1,2,0,8) y (1,5,0,5), pagando un total de 0,60 €.

En los puntos anteriores  $x$  corresponde a la cantidad de kilogramos del pienso P e  $y$  a la cantidad de kilogramos del pienso Q.

**Ejercicio 2.-** Un granjero dedicado a la cría de reses debe proporcionar una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0,60€ y el de pienso 1€, se pide:

-¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero?

-¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso? En caso de cambiar, ¿cuál sería la nueva solución?

- Solución:

a) Se minimizan los costes comprando 0,5 kg. de maíz y 1,75 kg. de pienso, ascendiendo dicho coste a 2,04€.

b) No varía la solución.

**Ejercicio 3.-** Se necesita una dieta que proporcione a un animal 3900 calorías y 24 unidades de proteínas al mes. En el mercado hay dos alimentos básicos que pueden usarse para preparar la dieta. El alimento I cuesta 20€/Kg y contiene 100 calorías y 0,5 unidades de proteínas por kg. El alimento II cuesta 15€/Kg y contiene 70 calorías y 0,8 unidades de proteínas por kg. Además, la cantidad que compre de alimento I debe ser mayor o igual que la de alimento II. Determina la combinación de alimentos más barata que satisfaga las necesidades de la dieta.

- Solución: Todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos  $A=(0, 390/7)$  y  $B=(32,10)$ .

## **D.- EJERCICIOS PARA PROFUNDIZAR**

**Ejercicio 1.-** Una factoría produce coches de juguete de los modelos A y B. El beneficio por la venta de un coche del modelo A es el mismo que el beneficio por la venta de un coche del modelo B. La capacidad de la factoría impide producir más de 400 coches por día del modelo A y más de 300 coches por día del modelo B. Además, no es posible producir diariamente más de 500 coches entre ambos modelos. Además, se deben producir mayor o igual cantidad de coches del modelo A.

Se vende toda la producción que se hace y se desea saber, razonadamente, cuántos coches interesa fabricar de cada modelo para maximizar beneficios. ¿Podemos saber a cuánto ascienden dichos beneficios?

- Solución: La solución se alcanza en todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos (250,250) y (400,100), con coordenadas enteras, ya que no se puede producir una parte del coche (o se fabrica entero, o no se fabrica). No podemos calcular los beneficios, porque no sabemos el beneficio por la fabricación de cada coche.

**Ejercicio 2.-** Un pastelero fabrica dos tipos de tartas  $T_1$  y  $T_2$ , para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150kg de A, 90kg de B y 150kg de C. Para fabricar una tarta  $T_1$  debe mezclar 1kg de A, 1kg de B y 2kg de C, mientras que para hacer una tarta  $T_2$  necesita 5kg de A, 2kg de B y 1kg de C.

- Si se venden las tartas  $T_1$  al doble de precio que las tartas  $T_2$ , ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?
- Si se fija el precio de una tarta del tipo  $T_1$  en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo  $T_2$  si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo  $T_1$  y 15 del tipo  $T_2$ ?

- Solución:

- Todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos (70,10) y (75,0), con coordenadas enteras.
- 30 €.

**Ejercicio 3.-** Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):

|   | A | B  | C |
|---|---|----|---|
| N | 6 | 15 | 3 |
| S | 4 | 20 | 5 |

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

- Solución:

- 0 locomotoras de A, a N y 9 locomotoras de A, a S.
- 10 locomotoras de B, a N y 0 locomotoras de B, a S.
- 1 locomotora de C, a N y 6 locomotoras de C, a S.

Ejercicio 4.- Un productor tabaquero posee 90 hectáreas de terreno para plantar dos variedades de tabacos A y B. La variedad A tiene un rendimiento de 9600 €/ha, pero necesita 2 h/ha de uso de maquinaria y 80 h/ha de mano de obra. Además, el Estado limita su explotación a 60 ha por plantación. La variedad B produce un rendimiento de 7500 €/ha y utiliza 4 h/ha de uso de maquinaria y 60 h/ha de mano de obra. La cooperativa local le ha asignado 320 h de uso de maquinaria, pero solo se dispone de 6000 horas de mano de obra a 12€/h. ¿Cuántas hectáreas debe dedicar a cada variedad de tabaco?

- Solución: 30 hectáreas de tabaco de la variedad A y 60 hectáreas de tabaco de la variedad B, para ganar 666.000 €.

Ejercicio 5.- Un empresario decide emplear hasta 30000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: A y B. El precio de cada acción es de 10 € en ambos casos. A dedica el 35 % de su actividad al sector seguros, el 45 % al sector inmobiliario y el 20 % al industrial. B dedica el 30 % de sus recursos al sector seguros, el 25 % al inmobiliario y el 45 % al industrial. El empresario no quiere invertir más del 40 % de su capital en el sector industrial, ni más del 35 % en el inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si A prevé entregar un dividendo de 1'2 €/acción y B de 1 €/acción?

-Solución. Debe adquirir 1500 acciones de la sociedad A y 1500 acciones de la sociedad B. De esta forma obtendrá unos beneficios de 3.300 €.

## **E.- EJERCICIOS PROPUESTOS**

Ejercicio 1.- Una industrial fabrica dos productos A y B. Por cada kilo de A necesita 4 horas de trabajo y 100 € de material y, además, le proporciona un beneficio de 75€. Por cada kilo de B necesita 7 horas de trabajo y 80€ de material y obtiene una ganancia de 50€. Cada semana el industrial puede contar con 200 horas de trabajo. Además, firmó un contrato que le obliga a producir un mínimo de 15kg de A y 10kg de B, y no puede gastar más de 3200 € en material. ¿Cuántos kilos por semana debe fabricar de cada producto para obtener el mayor beneficio posible?

- Solución: 24kg de A y 10kg de B. El beneficio es de 2300€.

Ejercicio 2.- Un fabricante de mueble hace dos tipos de sillas, A y B. Cada silla del tipo A requiere 8 horas de trabajo y cada una del tipo B, 5 horas. Los materiales para el tipo A cuestan 40€ y para el tipo B, 50€. En cada silla A, gana 17,50€ y en cada una de B, 15€. El fabricante debe tener en cuenta las siguientes restricciones:

- Tiene que fabricar al menos, 15 del tipo A y 10 del tipo B a la semana.
- Sólo puede trabajar un máximo de 320 horas por semana.
- El coste del material por semana no puede exceder los 2000€.

Calcular el número de sillas de cada clase que ha de fabricar a la semana para obtener beneficios máximos.

- Solución: 30 sillas de tipo A y 16 sillas de tipo B.

Ejercicio 3.- El dueño de una editorial está imprimiendo un nuevo libro y tiene las alternativas de empastarlo con cartón fino o con cartulina corriente. La venta de un libro con pasta de cartón fino le genera un beneficio de 30€, mientras que la venta de un libro empastado con cartulina corriente le genera un beneficio de 7,50€. El tiempo requerido para empastar un libro con cartón fino es de 3 minutos, y con cartulina corriente es de 2 minutos. Si su tiempo total disponible para empastarlo es de 80 horas y, además, estima que las ventas serán de no más de 6.000 copias para el libro empastado con cartón fino y no más de 10.000 copias para el libro con pasta de cartulina corriente, hallar el número de libros de cada clase que debe empastar.

- Solución: 1600 copias con cartón fino y ninguna con cartulina corriente.

Ejercicio 4.- El director del servicio de aguas de una ciudad debe encontrar la forma de proporcionar 10 millones de galones de agua potable al día (mgd). El suministro puede ser proporcionado por el depósito local o por medio de tuberías desde una ciudad vecina. El depósito local tiene un rendimiento diario de 5 mgd, que no puede ser sobrepasado. La tubería no puede abastecer más de 10 mgd debido a su diámetro. Por otra parte, por acuerdos previos, la tubería debe aportar al menos 6 mgd. Finalmente, el agua del depósito cuesta 30000€ por cada millón de galones, mientras que el coste correspondiente por millón de galones, por tubería, es de 50000€. ¿Cómo podría minimizarse el costo del suministro diario de agua?

- Solución: 4 mgd. por la red local y 6 mgd. por tubería.

Ejercicio 5.- Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas (de cortar, de coser y de teñir) se emplean en la producción. Fabricar una chaqueta representa emplear la máquina de cortar una hora, la de coser tres horas y la de teñir una hora; fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser una hora y la de teñir ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser doce y la de cortar siete. Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de 8€ por cada chaqueta y de 5€ por cada pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

- Solución: 2 chaquetas y 5 pantalones.

Ejercicio 6.- Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos:  $C_1$  y  $C_2$ , elaborados con ambos piensos. El paquete de  $C_1$  contiene una unidad de A y cinco de B, siendo su precio 1€, y el de  $C_2$  contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio de 4€. Además, por condiciones de mercado, el número de paquetes de  $C_2$  debe ser mayor o igual a la mitad de paquetes de  $C_1$ . ¿Qué cantidades de cada compuesto deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con mínimo coste?

- Solución: Todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos (4,5) y (8,4), con coordenadas enteras, ya que, no podremos comprar una porción de los paquetes  $C_1$  y  $C_2$ .

Ejercicio 7.- Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas. Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes:

- El del primer proveedor contiene un 80% de B y un 20% de A, y hay 1 unidad de A.
  - El del segundo proveedor contiene un 80% de A y un 20% de B, y hay 1 unidad de B.
- El primer proveedor vende cada lote a 10€ y el segundo al doble. ¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

-Solución: La solución se encuentra comprando 2 lotes del primer proveedor y 2 lotes del segundo proveedor, ascendiendo a 30€ el coste.

Ejercicio 8.- Una empresa consultora tiene en cartera realizar dos tipos de proyectos, A y B, cuyo coste de desarrollo unitario es el mismo. Las necesidades de analistas, programadores y terminales para cada proyecto se indican en la tabla siguiente:

| TIPO | PROGRAMADORES | ANALISTAS | TERMINALES |
|------|---------------|-----------|------------|
| A    | 2             | 2         | 3          |
| B    | 3             | 6         | 1          |

Dado que la empresa dispone de al menos 10 programadores y 5 analistas y se cuenta únicamente con 6 terminales, calcula cuántos proyectos deben realizarse de cada tipo para minimizar su coste de desarrollo, sabiendo que los proyectos pueden realizarse total o parcialmente.

- Solución: 10/3 proyectos de tipo B.

Ejercicio 9.- Una empresa tiene dos centros de producción que producen tres tipos de productos: A, B y C. Sus compromisos comerciales consisten en entregar semanalmente 18 unidades del tipo A, 16 del tipo B y 6 del tipo C. El primer centro de producción le cuesta diariamente 10.000€ y produce, diariamente, las siguientes unidades: 9 de A, 4 de B y 1 de C. El segundo centro de producción le cuesta diariamente 8.000€ y produce, diariamente, las siguientes unidades: 3 de A, 4 de B y 3 de C.

¿Cuántos días por semana debe trabajar cada centro de producción para que, cumpliendo los compromisos comerciales, se reduzcan al máximo los costos de producción?

- Solución: Deben trabajar 1 y 3 días/semana, respectivamente.

Ejercicio 10.- Por Navidad, una empresa quiere preparar dos tipos de cestas, A y B. Cada cesta del tipo A ha de contener 4 barras de turrón y 2 botellas de cava, y cada cesta del tipo B ha de contener 3 barras de turrón y 3 botellas de cava. La empresa dispone de 480 barras de turrón y 360 botellas de cava. Calcula:

- Si con cada cesta de tipo A se obtiene un beneficio de 40 € y con cada cesta de tipo B, un beneficio de 50 €. ¿Cuántas cestas de cada tipo se tienen que preparar para obtener el beneficio máximo? ¿a cuánto asciende dicho beneficio?
- Si con las cestas de tipo A se obtiene un beneficio de 60 €. ¿Cuánto debo ganar con cada cesta de tipo B para que sea una solución el punto (90,40)?.

- Solución.

- 60 cestas de tipo A y 80 cestas de tipo B con unas ganancias de 6400 €.
- El beneficio con cada cesta de tipo B debe ser de 45 €.

## RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PLANTEADOS

### EJERCICIO A.1

Primer paso.- Dar nombre a las incógnitas. (Generalmente las incógnitas corresponden a lo que te pregunta el ejercicio). Luego,

X= Número de sillas pequeñas que se fabrican.

Y= Número de sillas grandes que se fabrican.

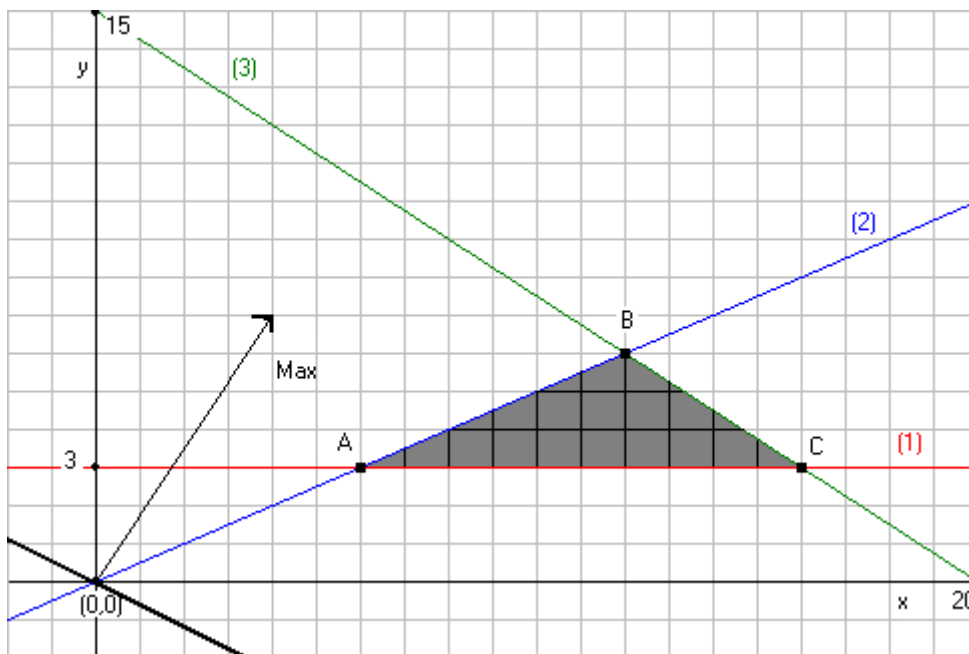
Segundo paso.- Plantear el problema a partir de los datos del problema.

$$\text{Max } 20x + 35y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} y \geq 3 & \Rightarrow \text{Se fabrican al menos tres sillas grandes} \\ x \geq 2y & \Rightarrow \text{El n}^\circ \text{ de sillas pequeñas es al menos el doble que el de grandes} \\ 3x + 4y \leq 60 & \Rightarrow \text{En esta inecuación se reflejan las limitaciones de madera} \\ x \geq 0 & \Rightarrow \text{El n}^\circ \text{ de sillas pequeñas debe ser un n}^\circ \text{ positivo y entero} \\ y \geq 0 & \Rightarrow \text{El n}^\circ \text{ de sillas grandes debe ser un n}^\circ \text{ positivo y entero} \end{cases}$$

La región factible quedará de la siguiente manera:



Donde (1) procede de la primera restricción, (2) de la segunda restricción y (3) de la tercera restricción, y  $A=(6,3)$ ,  $B=(12,6)$  y  $C=(16,3)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 20 \cdot 6 + 35 \cdot 3 = 225€$$

$$F(B) = 20 \cdot 12 + 35 \cdot 6 = \mathbf{450€}$$

$$F(C) = 20 \cdot 16 + 35 \cdot 3 = 425€$$

Luego el máximo se alcanza fabricando 12 sillas pequeñas y 6 sillas grandes, con un beneficio de 450 €.

También podremos encontrar el máximo a partir de la recta de nivel, que está representada con una línea negra, y el vector de crecimiento.

## **EJERCICIO A.2**

Primer paso. Debemos dar nombre a las incógnitas.

$X$  = Número de meses que trabaja la primera factoría.

$Y$  = Número de meses que trabaja la segunda factoría.

Segundo paso. Plantear el problema de programación lineal.

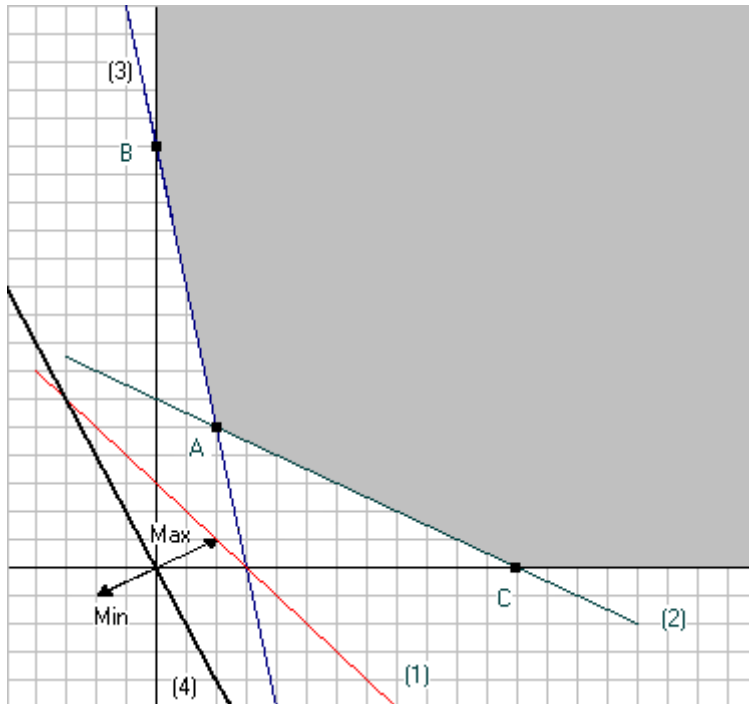
Nota.- Podemos multiplicar la función objetivo por un número positivo sin que cambie el problema.

$$\text{Min } 6000x + 3000y \quad \text{ó} \quad \text{Min } 2x + y \quad (\text{Dividiendo por } 3000)$$

sujeto a :

$$\begin{cases} x + y \geq 3 & (1) \\ x + 2y \geq 12 & (2) \\ 5x + y \geq 15 & (3) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Luego la representación gráfica del problema será la siguiente:



Donde:

- (1) representa la recta  $x+y=3$  relativa a la necesidad de fabricación del barco R,
  - (2) representa la recta  $x+2y=12$  relativa a la necesidad de fabricación del barco S,
  - (3) representa la recta  $5x+y=15$  relativa a la necesidad de fabricación del barco T,
- Además, la cuarta y quinta restricción se deben a que el número de meses que trabajan las factorías no puede ser un número negativo.
- (4) representa la recta de nivel  $2x+y=0$  que se deriva de la función objetivo.

¿Cómo sabemos en que dirección y sentido se maximiza?

Se maximiza en la dirección y sentido del vector gradiente  $(2,1)$ . Donde 2 es el número que multiplica a  $x$ , y 1 es el número que multiplica a  $y$  en la función objetivo. Luego en sentido contrario se minimiza. ¿Cómo se calculan los vértices?

Vértice A. Punto de corte de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 5x + y = 15 \end{cases}$ , de donde obtenemos  $A=(2,5)$ .

Vértice B. Punto de corte de las rectas  $\begin{cases} 5x + y = 15 \\ x = 0 \end{cases}$ , de donde obtenemos  $B=(0,15)$ .

Vértice C. Punto de corte de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ y = 0 \end{cases}$ , de donde obtenemos  $C=(12,0)$ .

Vemos claramente que desplazando paralelamente la recta de nivel sobre la región factible en la dirección y sentido de minimizar el mínimo se alcanza en el punto **A**, o sea, que para minimizar el gasto deben de trabajar 2 meses la primera factoría y 5 meses la segunda factoría.

Existe una restricción que no influye en la resolución del problema, que es la  $x+y=3$ , con lo que se puede suprimir sin que varíe el problema.

### EJERCICIO A.3

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas (siempre relacionadas con los datos que nos preguntan)

X= Número de vehículos de 6 plazas que se utilizan.

Y= Número de vehículos de 21 plazas que se utilizan.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Min } 80x + 210y \quad \text{ó} \quad \text{Min } 8x + 21y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} x \leq 8 & (1) \\ y \leq 8 & (2) \\ x + y \leq 10 & (3) \\ 6x + 15y \geq 114 & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera y segunda desigualdad hacen referencia a las limitaciones de vehículos. No se pueden utilizar más de 8 vehículos de 6 plazas y no más de 8 vehículos de 15 plazas.

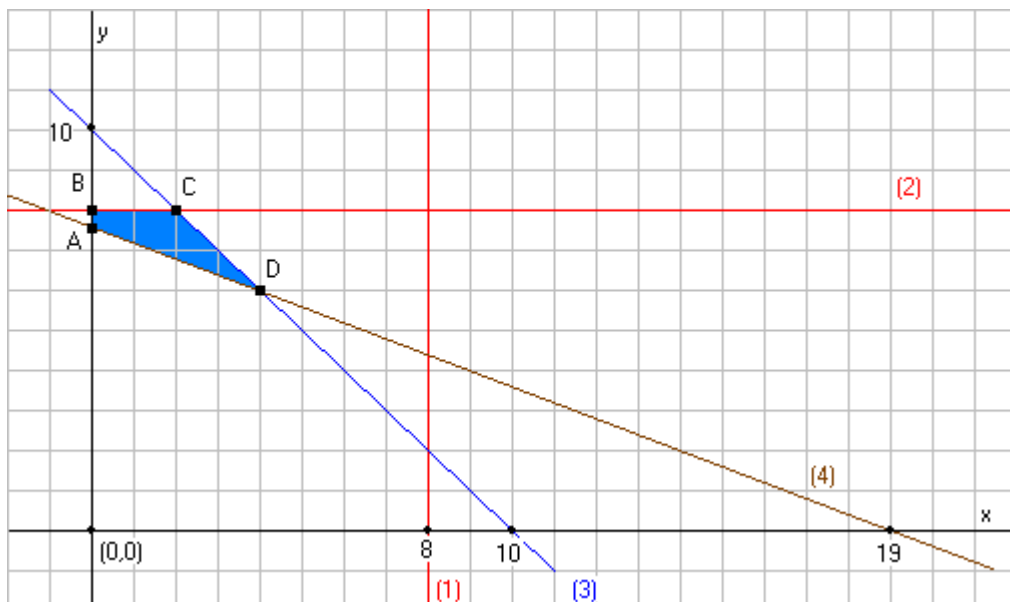
- La tercera desigualdad hace referencia a la limitación en el número de conductores. Luego como solo disponemos de 10 conductores no se pueden utilizar más de 10 vehículos.

- La cuarta desigualdad nos asegura que todos los alumnos participen en el viaje.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de vehículos no puede ser un número negativo.

NOTA.- Además el número de vehículos debe ser un número entero, luego debemos tenerlo en cuenta al encontrar la solución.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 15y = 114 \end{cases}$ , luego  $A=(0,7'6)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases}$ , luego  $B=(0,8)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases}$ , luego  $C=(2,8)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 10 \\ 6x + 15y = 114 \end{cases}$ , luego  $D=(4,6)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 80 \cdot 0 + 210 \cdot 7'6 = 1596 \text{ €}$$

$$F(B) = 80 \cdot 0 + 210 \cdot 8 = 1680 \text{ €}$$

$$F(C) = 80 \cdot 2 + 210 \cdot 8 = 1740 \text{ €}$$

$$F(D) = 80 \cdot 4 + 210 \cdot 6 = \mathbf{1580 \text{ €}}.$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **D**. Así que, se deberán utilizar 4 vehículos de 6 plazas y 6 vehículos de 15 plazas para minimizar el coste, ascendiendo éste a 1580 €.

## EJERCICIO A.4

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas (siempre relacionadas con los datos que nos preguntan)

X= Número de hectáreas plantadas de hortaliza.

Y= Número de hectáreas plantadas de remolacha.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

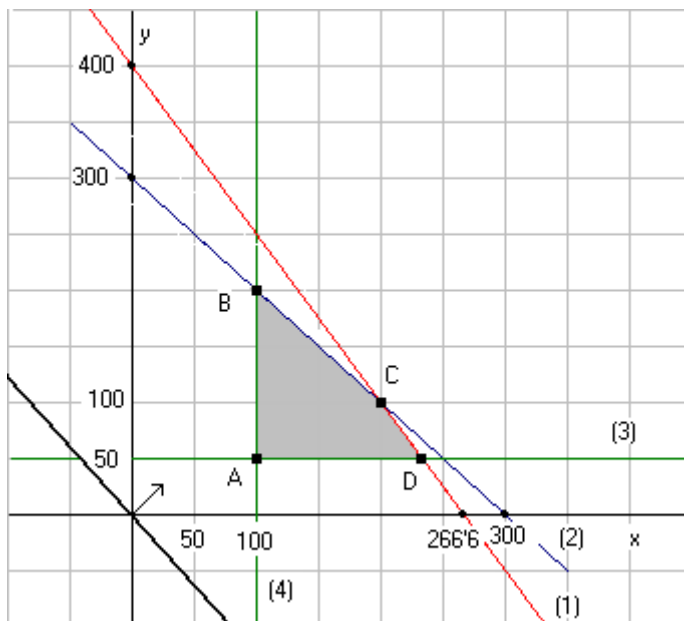
$$\text{Min } 25000x + 20000y \quad \text{ó} \quad \text{Min } 25x + 20y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} 1'5x + y \leq 400 & (1) \\ x + y \geq 300 & (2) \\ y \geq 50 & (3) \\ x \geq 100 & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera desigualdad hace referencia a las limitaciones de agua.
- La segunda y tercera desigualdad hacen referencia a la condición de mínima plantación.
- La cuarta desigualdad se debe a la limitación de terreno.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de hectáreas no puede ser un número negativo.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 100 \\ y = 50 \end{cases}$ , luego  $A=(100,50)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 300 \\ x = 100 \end{cases}$ , luego  $B=(100,200)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} 15x + y = 400 \\ x + y = 300 \end{cases}$ , luego  $C=(200,100)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} 15x + y = 400 \\ y = 50 \end{cases}$ , luego  $D=(700/3,50)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 25000 \cdot 100 + 20000 \cdot 50 = 3.500.000 \text{ €}$$

$$F(B) = 25000 \cdot 100 + 20000 \cdot 200 = 6.500.000 \text{ €}$$

$$F(C) = 25000 \cdot 200 + 20000 \cdot 100 = \mathbf{7.000.000 \text{ €}}$$

$$F(D) = 25000 \cdot (700/3) + 20000 \cdot 50 = 20.500.000/3 = 6833.333... \text{ €}$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **C**. Así que, se deberán plantar 200 hectáreas de hortaliza y 100 hectáreas de remolacha para maximizar los beneficios que ascienden a 7.000.000 €.

## EJERCICIO A.5

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas (siempre relacionadas con los datos que nos preguntan)

X= Número de latas de la marca A.

Y= Número de latas de la marca B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

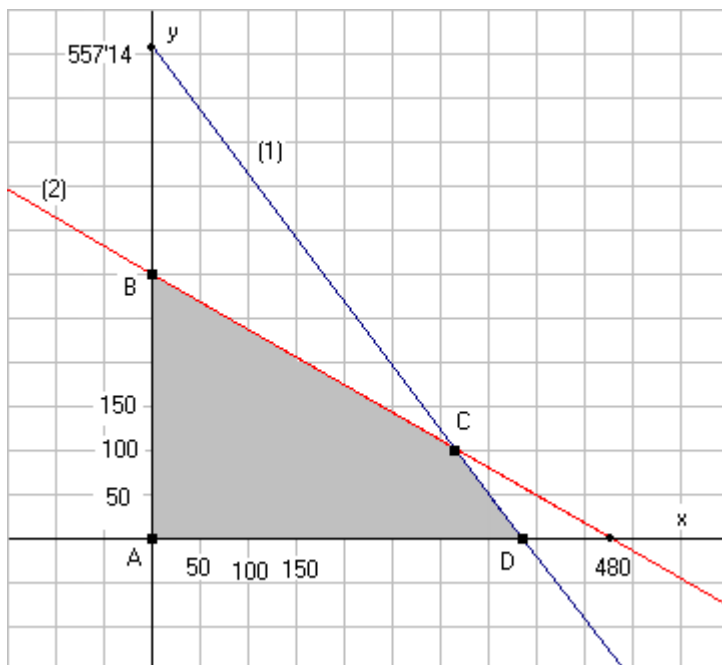
$$\text{Max } 30x + 24y \quad \text{ó} \quad \text{Max } 5x + 4y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} 200x + 140y \leq 78000 & (1) \\ 100x + 160y \leq 48000 & (2) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera desigualdad hace referencia a las limitaciones de carne por hora.
- La segunda desigualdad hace referencia a las limitaciones de harina por hora.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de hectáreas no puede ser un número negativo (Además debe ser un número entero, ya que estamos hablando del número de latas).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 100x + 160y = 48000 \\ x = 0 \end{cases}$ , luego  $B=(0,300)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} 100x + 160y = 48000 \\ 200x + 140y = 78000 \end{cases}$ , luego  $C=(320,100)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} 200x + 140y = 78000 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $D=(390,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 30 \cdot 0 + 24 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 30 \cdot 0 + 24 \cdot 300 = 7200 \text{ €}.$$

$$F(C) = 30 \cdot 320 + 24 \cdot 100 = 9600 + 2400 = \mathbf{12000 \text{ €}}.$$

$$F(D) = 30 \cdot 390 + 24 \cdot 0 = 11700 \text{ €}$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **C**. Así que, se deberán fabricar 320 latas de la marca A y 100 latas de la marca B por hora para maximizar los beneficios. En dicho máximo se alcanzaran unos beneficios de 12.000 €.

## **EJERCICIO A.6**

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de coches del modelo básico fabricados.

Y= Número de coches del modelo de lujo fabricados.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Max } x + y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} 6000x + 9000y \leq 360000 & (1) \\ y \leq x & (2) \\ x \leq 45 & (3) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

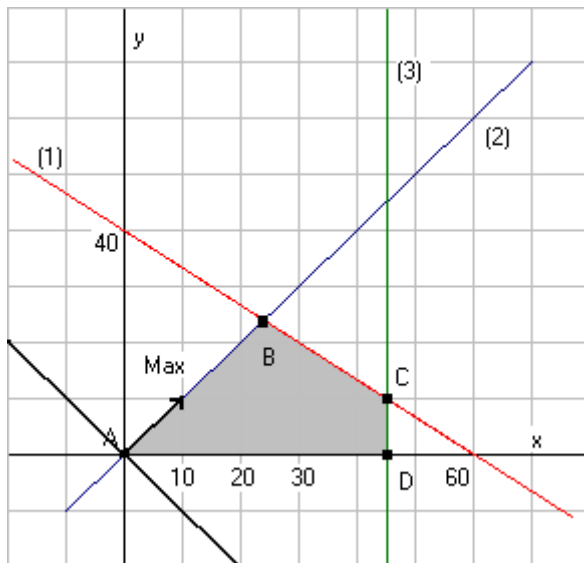
La primera desigualdad hace referencia a las limitaciones de dinero para la fabricación de coches (sólo disponemos de 360000€, y cada coche del modelo básico vale 6000€ y 9000€ cada coche de lujo).

La segunda desigualdad deriva de que debemos fabricar al menos tantos coches del modelo básico como coches del modelo de lujo.

La tercera desigualdad nos dice que no se pueden fabricar más de 45 coches del modelo básico.

Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de coches fabricados no puede ser un número negativo (Además debe ser un número entero, ya que estamos hablando coches).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 6000x + 9000y = 360000 \\ x = y \end{cases}$  , luego  $B=(24,24)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} 6000x + 9000y = 360000 \\ x = 45 \end{cases}$  , luego  $C=(45,10)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 45 \\ y = 0 \end{cases}$  , luego  $D=(45,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$F(A) = 0+0 = 0$  coches.

$F(B) = 24+24 = 48$  coches.

$F(C) = 45+10 = \mathbf{55 \text{ coches.}}$

$F(D) = 45+0 = 45$  coches.

Luego, la solución la encontramos en el vértice C. Así que, se deberán fabricar 45 coches del modelo básico y 10 coches del modelo de lujo para maximizar la fabricación de coches, fabricando un total de 55 coches.

También podemos llegar a esta solución transportando paralelamente la recta de nivel (en negro) según la dirección y sentido del vector de crecimiento.

Para la fabricación de 45 coches del modelo básico y 10 coches del modelo de lujo gastamos un total de  $6000 \cdot 45 + 9000 \cdot 10 = 360.000$  €, luego agotamos todo el presupuesto. Este razonamiento no haría falta hacerlo, ya que, el punto (45,10) pertenece a la recta  $6000x + 9000y = 360000$  en la representación gráfica anterior.

La respuesta al primer apartado será que puede fabricar de cada modelo los coches asociados a los puntos con coordenadas enteras pertenecientes a la región sombreada.

## EJERCICIO A.7

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de motocicletas del modelo A.

Y= Número de motocicletas del modelo B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

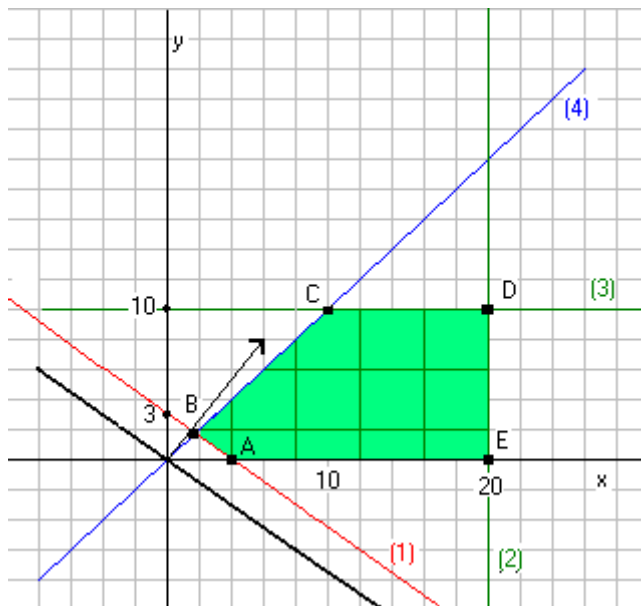
$$\text{Max } 9000x + 12000y \quad \text{ó} \quad \text{Max } 3x + 4y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} 9000x + 12000y \leq 36000 \Rightarrow 3x + 4y \leq 12 & (1) \\ x \leq 20 & (2) \\ y \leq 10 & (3) \\ x \geq y & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera desigualdad hace referencia a las limitaciones de dinero.
- La segunda y tercera desigualdad procede de las limitaciones de fabricación de cada motocicleta.
- La cuarta desigualdad se debe a que quiere vender, al menos, tantas del modelo A como del modelo B.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de motocicletas no puede ser un número negativo (además debe ser un número entero).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $A=(4,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = x \end{cases}$ , luego  $B=(12/7,12/7)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} y = x \\ y = 10 \end{cases}$ , luego  $C=(10,10)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$ , luego  $D=(20,10)$ .

Vértice E: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $E=(20,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 9000 \cdot 4 + 12000 \cdot 0 = 36.000 \text{ €}.$$

$$F(B) = 9000 \cdot (12/7) + 12000 \cdot (12/7) = 36.000 \text{ €}.$$

$$F(C) = 9000 \cdot 10 + 12000 \cdot 10 = 210.000 \text{ €}.$$

$$F(D) = 9000 \cdot 20 + 12000 \cdot 10 = \mathbf{300.000 \text{ €}}.$$

$$F(E) = 9000 \cdot 20 + 12000 \cdot 0 = 180.000 \text{ €}.$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **D**. Así que, se deberán fabricar 20 motocicletas del modelo A y 10 motocicletas del modelo B para maximizar los beneficios. En dicho máximo se alcanzaran unos beneficios de 300.000 €.

Otra manera de encontrar el máximo:

Debemos desplazar paralelamente la recta de nivel  $3x+4y=0$  (en negro) según la dirección y sentido del vector de crecimiento a lo largo de la región factible. De esta forma encontraremos el máximo en  $D=(20,10)$ .

## **EJERCICIO A.8**

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de bidones de aceite de girasol.

Y= Número de bidones de aceite de oliva.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

Max  $0.5x + y$

sujeto a :

$$\begin{cases} x \geq 20, y \geq 40 & (1) \\ y \geq \frac{x}{2} & (2) \\ x + y \leq 150 & (3) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

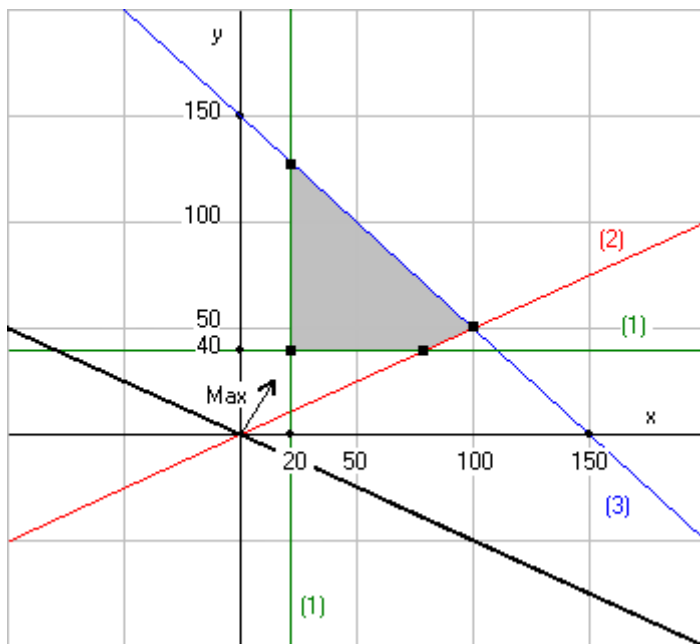
- La primera desigualdad se debe al almacenamiento mínimo de cada uno de los aceites.

- La segunda se debe a que el número de bidones de aceite de oliva no puede ser inferior a la mitad de bidones de aceite de girasol.

- La tercera se debe a que la capacidad de almacenamiento es de 150 bidones.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de bidones no puede ser un número negativo (además debe ser un número entero).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

$$\text{Vértice A: intersección de las rectas } \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow A=(20,40).$$

$$\text{Vértice B: intersección de las rectas } \begin{cases} x = 20 \\ x + y = 150 \end{cases} \Rightarrow B=(20,130).$$

$$\text{Vértice C: intersección de las rectas } \begin{cases} x + y = 150 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow C=(100,50).$$

$$\text{Vértice D: intersección de las rectas } \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow D=(80, 40).$$

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 0'5 \cdot 20 + 40 = \mathbf{50 \text{ €}}.$$

$$F(B) = 0'5 \cdot 20 + 130 = \mathbf{140 \text{ €}}.$$

$$F(C) = 0'5 \cdot 100 + 50 = 100 \text{ €}.$$

$$F(D) = 0'5 \cdot 80 + 40 = 80 \text{ €}.$$

Luego el mínimo se alcanzará en el punto **A**, o sea, almacenando un total de 20 bidones de aceite de girasol y 40 bidones de aceite de oliva con un gasto total de 50 €.

Igualmente podemos observar que el máximo se alcanza en el punto **B**, almacenando 20 bidones de aceite de girasol y 130 bidones de aceite de oliva, con unos beneficios de 140 €.

Para resolver la segunda cuestión, como tenemos las mismas restricciones la región factible no cambiará, lo único que cambia será la función objetivo, que pasa a valer  $F(x,y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y$ , así con esta nueva función objetivo resolveremos el problema de la misma forma que en el apartado anterior.

$$F(A) = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 40 = \mathbf{120 \text{ €}}.$$

$$F(B) = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 130 = \mathbf{300 \text{ €}}.$$

$$F(C) = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 50 = \mathbf{300 \text{ €}}.$$

$$F(D) = 2 \cdot 80 + 2 \cdot 40 = 240 \text{ €}.$$

Luego, a juzgar por los resultados obtenidos se alcanza el mínimo en el punto A, almacenando 20 bidones de aceite de girasol y 40 bidones de aceite de oliva, con un gasto de 120 €.

El máximo se alcanzará en todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos B y C, con coordenadas enteras con un beneficio de 300 €.

## EJERCICIO A.9

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de joyas de tipo A.

Y= Número de joyas de tipo B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Min } 25x + 30y \quad \text{ó} \quad \text{Min } 5x + 6y$$

sujeto a :

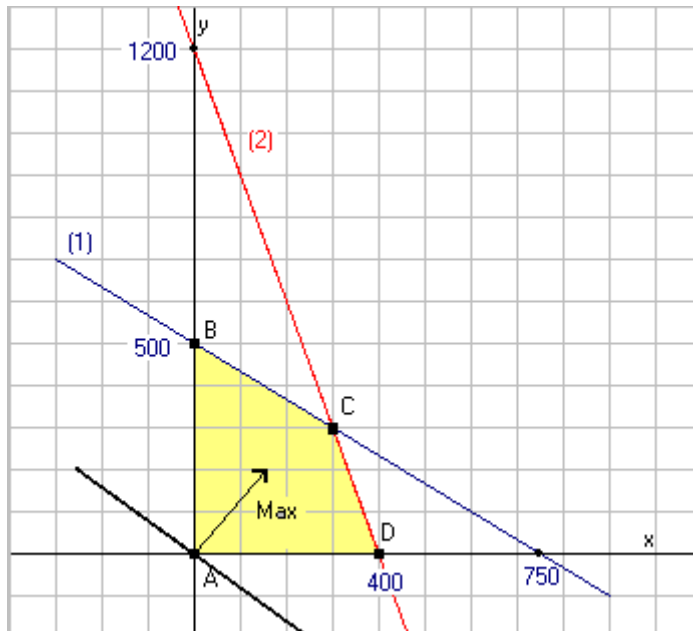
$$\begin{cases} x + 1.5y \leq 750 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y \geq 1200 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera desigualdad hace referencia a las limitaciones de oro.
- La segunda desigualdad deriva de las limitaciones de plata.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de joyas no puede ser un número negativo (además, debe ser un número entero).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 15y = 750 \\ x = 0 \end{cases}$  , luego  $B=(0,500)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} 15x + y = 400 \\ 3x + y = 1200 \end{cases}$  , luego  $C=(300,300)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} 3x + y = 1200 \\ y = 0 \end{cases}$  , luego  $D=(400,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 25 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 25 \cdot 0 + 30 \cdot 500 = 15.000 \text{ €}.$$

$$F(C) = 25 \cdot 300 + 30 \cdot 300 = \mathbf{16.500 \text{ €}}.$$

$$F(D) = 25 \cdot 400 + 30 \cdot 0 = 10.000 \text{ €}.$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **C**. Así que, se deberán fabricar 300 joyas de tipo A y 300 joyas de tipo B para ganar un total de 16.500 €.

Para la segunda pregunta la región factible sigue siendo la misma, luego tendrá los mismos vértices, sólo cambia la función objetivo, que pasa a valer  $F(x,y) = 60x + 20y$ . Como el conjunto sigue siendo limitado, lógicamente, compararemos lo que ganamos en los vértices.

$$F(A) = 60 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 60 \cdot 0 + 20 \cdot 500 = 10.000 \text{ €}.$$

$$F(C) = 60 \cdot 300 + 20 \cdot 300 = \mathbf{24.000 \text{ €}}.$$

$$F(D) = 60 \cdot 400 + 20 \cdot 0 = \mathbf{24.000 \text{ €}}.$$

Como podemos observar obtenemos la misma ganancia en los puntos **C** y **D**, luego el máximo se alcanza en todos los puntos comprendidos en el segmento comprendido entre los puntos C y D, con coordenadas enteras, ya que estamos hablando de la fabricación de joyas. En dicho máximo ganaremos un total de 24.000 €.

## **EJERCICIO A.10**

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de electricistas que contrataremos.

Y= Número de mecánicos a contratar.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Max } 150x + 120y \quad \text{ó} \quad \text{Max } 5x + 4y$$

sujeto a :

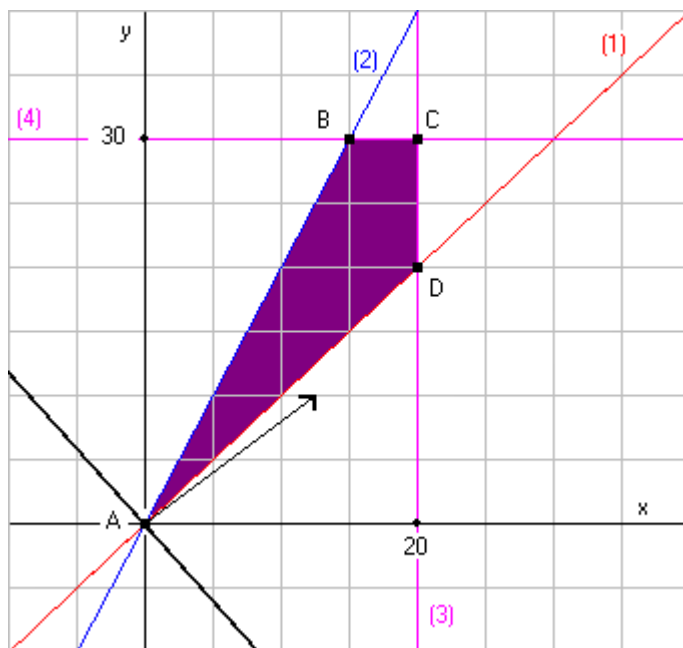
$$\begin{cases} y \geq x & (1) \\ y \leq 2x & (2) \\ x \leq 20 & (3) \\ y \leq 30 & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera desigualdad se debe a que el número de electricistas debe ser mayor o igual que el número de mecánicos, y la segunda a que el número de electricistas debe ser menor o igual al doble de mecánicos.

- La tercera significa que el número de electricistas no puede exceder de 30, y la cuarta a que el número de mecánicos no puede exceder de 20.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de electricistas y mecánicos no puede ser un número negativo (además debe ser un número entero, ya que estamos hablando de personas).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} y = 2x \\ y = 30 \end{cases}$  , luego  $B=(15,30)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} y = 30 \\ x = 20 \end{cases}$  , luego  $C=(20,30)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 20 \\ y = x \end{cases}$  , luego  $D=(20,20)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 150 \cdot 0 + 120 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 150 \cdot 15 + 120 \cdot 30 = 5850 \text{ €}.$$

$$F(C) = 150 \cdot 20 + 120 \cdot 30 = \mathbf{6600 \text{ €}}.$$

$$F(D) = 150 \cdot 20 + 120 \cdot 0 = 3000 \text{ €}$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **C**. Así que, se deberán contratar 20 electricistas y 30 mecánicos para alcanzar unos beneficios de 6.600 €.

## EJERCICIO B.1

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de kg del producto A.

Y= Número de kg del producto B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Min } 30x + 40y$$

sujeto a :

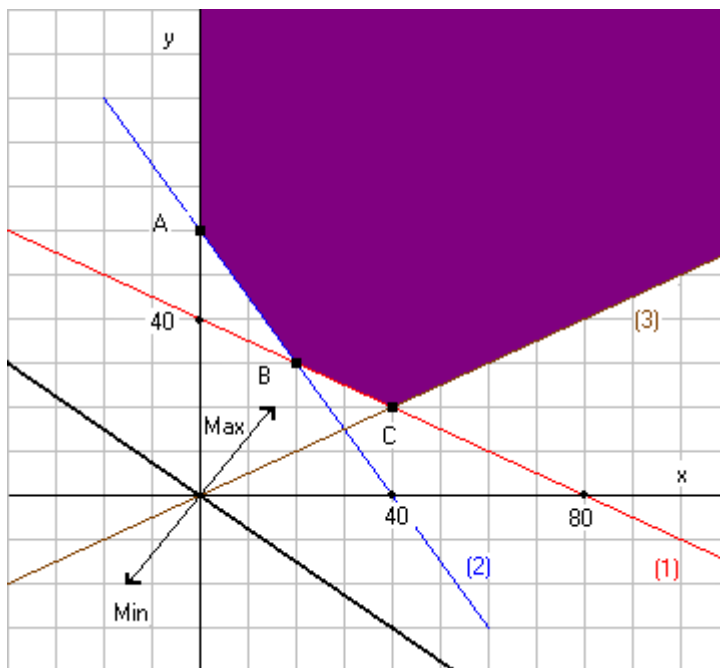
$$\begin{cases} 0'10x + 0'20y \geq 8 & \Rightarrow x + 2y \geq 80 & (1) \\ 0'30x + 0'20y \leq 12 & \Rightarrow 3x + 2y \leq 120 & (2) \\ y \geq \frac{x}{2} & (3) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera y segunda desigualdad se deben a las cantidades mínimas de nitrógeno y fósforo que necesita la huerta.

- La tercera se debe a que me obligan a adquirir por lo menos tanta cantidad de B como la mitad de A.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número kg no puede ser un número negativo. En este caso podría resultar una solución con número decimales no enteros porque x e y con número de kg.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ x = 0 \end{cases}$ , luego  $A=(0,60)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 2y = 80 \end{cases}$ , luego  $B=(20,30)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 80 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$ , luego  $C=(40,20)$ .

La recta de nivel es la  $30+40y = 0$ , que está representada en negro, el vector de crecimiento es  $(30,40)$  y el de decrecimiento el  $(-30,-40)$ , con lo que para minimizar deberemos desplazar paralelamente la recta de nivel en la dirección y sentido del vector de decrecimiento. Así, resulta que el mínimo se alcanza en el punto **B= (20,30)**.

Luego para minimizar los gastos debemos comprar 20 kg de producto A y 30 kg de producto B, gastando un total de  $F(B) = 30 \cdot 20 + 40 \cdot 30 = 1800$  €.

## EJERCICIO B.2

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de kg de mezcla de tipo A.

Y= Número de kg de mezcla de tipo B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

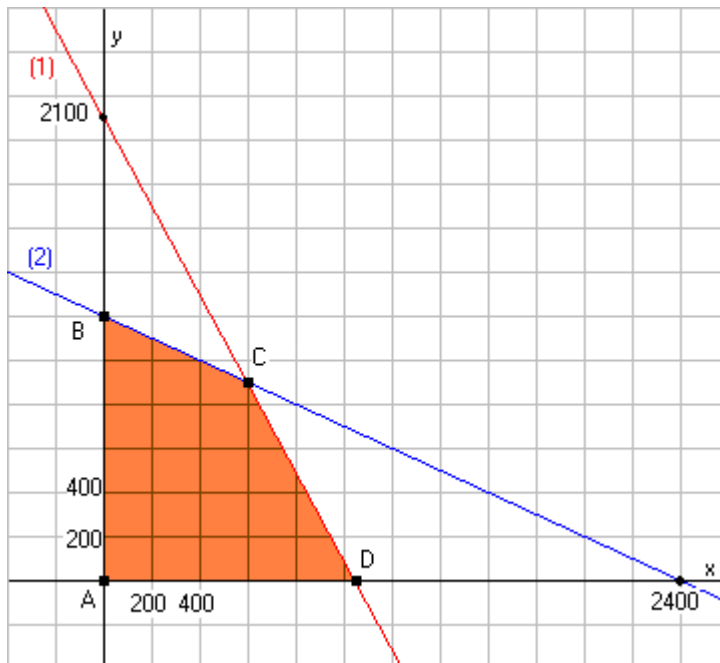
$$\text{Max } 22x + 26y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \leq 700 \Rightarrow 2x + y \leq 2100 & (1) \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \leq 800 \Rightarrow x + 2y \leq 2400 & (2) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera desigualdad se debe a las limitaciones de café de tipo C.
- La segunda desigualdad se debe a las limitaciones de café de tipo K.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de kg de ambas mezclas no puede ser un número negativo.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 2400 \\ x = 0 \end{cases}$ , luego  $B=(0,1200)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 2400 \\ 2x + y = 2100 \end{cases}$ , luego  $C=(600,900)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} 2x + y = 2100 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $D=(1050,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 22 \cdot 0 + 26 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 22 \cdot 0 + 26 \cdot 1200 = 31600 \text{ €}.$$

$$F(C) = 22 \cdot 600 + 26 \cdot 900 = \mathbf{36600 \text{ €}}.$$

$$F(D) = 22 \cdot 1050 + 26 \cdot 0 = 23100 \text{ €}$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **C**. Así que, se deberán obtener 600 kg de mezcla de tipo A y 900 kg de mezcla de tipo B, con unos beneficios de 36600 €.

### EJERCICIO B.3

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de pizzas del tipo normal.

Y= Número de pizzas del tipo especial.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Max } 2,5x + 4y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} 1x + 1y \leq 150 & (1) \\ 0,25x + 0,5y \leq 50 \Rightarrow x + 2y \leq 200 & (2) \\ x \leq 125, \quad y \leq 125 & (3) \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

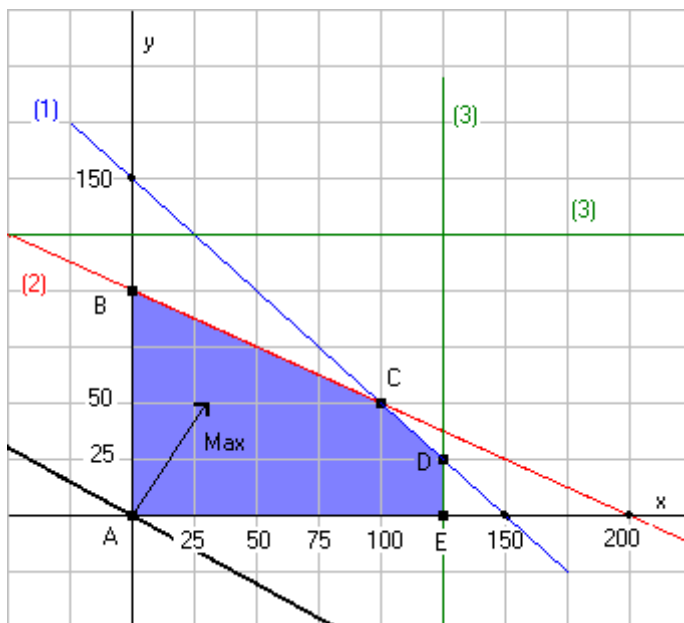
- La primera desigualdad se debe a las limitaciones de masa, ya que cada pizza normal necesita 1kg (el 80% de 1,25kg) de masa y cada pizza especial necesita 1kg (de 1,5kg dos partes de masa por una de recubrimiento).

- La segunda desigualdad hace referencia a las limitaciones de recubrimiento, necesitando 0,25kg por pizza normal y 0,50kg por pizza especial.

- La tercera se debe a que no se pueden vender más de 125 pizzas de cada clase.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de pizzas no puede ser un número negativo (además debe ser un número entero)

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 200 \\ x = 0 \end{cases}$ , luego  $B=(0,100)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 150 \\ x + 2y = 200 \end{cases}$ , luego  $C=(100,50)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 150 \\ x = 125 \end{cases}$ , luego  $D=(125,25)$ .

Vértice E: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 125 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $E=(125,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 2'5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 2'5 \cdot 0 + 4 \cdot 100 = 400 \text{ €}.$$

$$F(C) = 2'5 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = \mathbf{450 \text{ €}}.$$

$$F(D) = 2'5 \cdot 125 + 4 \cdot 25 = 412'5 \text{ €}.$$

$$F(E) = 2'5 \cdot 125 + 4 \cdot 0 = 312'5 \text{ €}.$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **C**. Así que, se deberán cocinar 100 pizzas del tipo normal y 50 pizzas del tipo especial para maximizar los beneficios, alcanzando éstos un valor de 450 €.

También podemos resolver el ejercicio a partir de la recta de nivel (la recta dibujada en negro), y el vector de crecimiento.

### EJERCICIO C.1

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de kilogramos de pienso P al día.

Y= Número de kilogramos de pienso Q al día.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

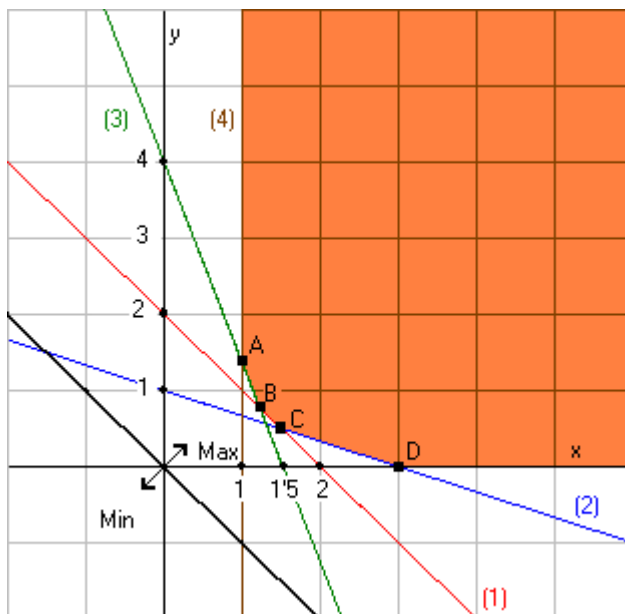
$$\text{Min } 0.3x + 0.3y$$

*sujeto a :*

$$\begin{cases} x + y \geq 2 & (1) \\ x + 3y \geq 3 & (2) \\ 20x + 75y \geq 30 & (3) \\ 2x \geq 2 & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Las cuatro primeras desigualdades atienden a las necesidades que se deben cubrir de vitamina A, B, C y D por día respectivamente.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de kilogramos de pienso no puede ser un número negativo.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 1 \\ 20x + 7,5y = 30 \end{cases}$  , luego  $A=(1,4/3)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 20x + 7,5y = 30 \\ x + y = 2 \end{cases}$  , luego  $B=(1.2,0.8)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$  , luego  $C=(1.5,0.5)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$  , luego  $D=(3,0)$ .

La recta representada en negro corresponde a la recta de nivel  $0,30x+0,30y=0$ , luego transportando paralelamente esta recta según la dirección y sentido del vector de decrecimiento a lo largo de la región factible encontramos la solución en todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos **B** y **C**. Como x e y son el número de kilogramos pueden tomar valores no enteros. En dicho mínimo tendremos que pagar un total de  $F(B) = 0,30 \cdot 1,2 + 0,30 \cdot 0,8 = \mathbf{0,60 \text{ €}}$  =  $F(C) = 0,30 \cdot 1,5 + 0,30 \cdot 0,5 = \mathbf{0,60 \text{ €}}$ .

## EJERCICIO C.2

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de kilogramos de maíz para cada res al día.

Y= Número de kilogramos de pienso para cada res al día.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$\text{Min } 0'6x + 1y$

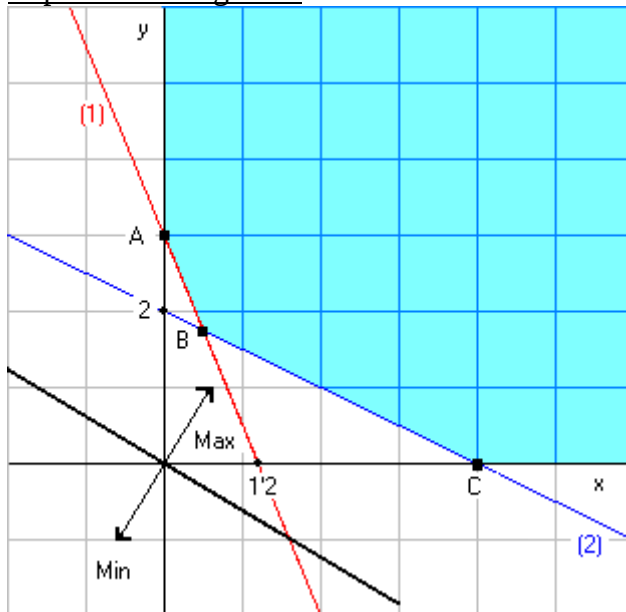
sujeto a :

$$\begin{cases} 2'5x + y \geq 3 & (1) \\ x + 2y \geq 4 & (2) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Las dos primeras desigualdades se deben a las necesidades que se deben cubrir de hierro y vitamina para cada res al día respectivamente.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de kilogramos de maíz y pienso no puede ser un número negativo.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ 2'5x + y = 3 \end{cases}$ , luego  $A=(0,3)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 2,5x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ , luego  $B=(0,5,1,75)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $C=(4,0)$ .

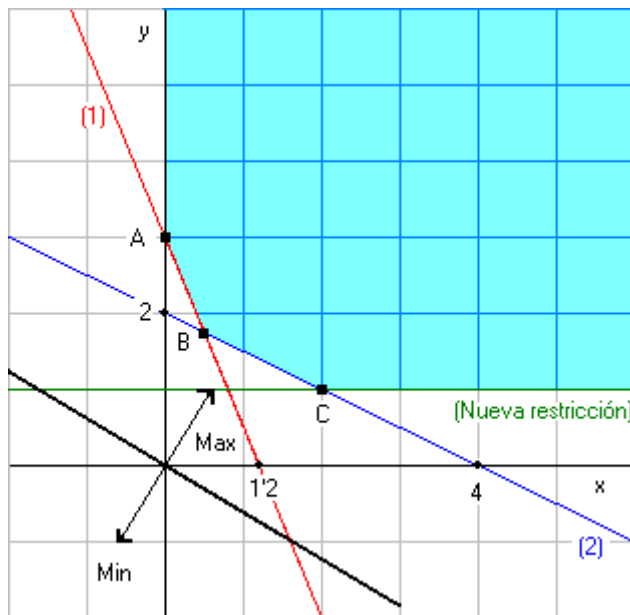
La recta representada en negro corresponde a la recta de nivel  $0,60x + y = 0$ , luego transportando paralelamente esta recta según la dirección y sentido del vector de decrecimiento a lo largo de la región factible encontramos la solución en el punto **B**. Si tenemos dificultad a la hora de encontrar el mínimo y dudamos entre dos puntos, en este caso entre B y C, podemos comparar la pendiente de la recta de nivel y la pendiente de la recta (2), o simplemente calcular cuanto gastamos en cada punto:

$$F(B) = 0,60 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,75 = 2,05 \text{ € por res.}$$

$F(C) = 0,60 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = \mathbf{2,40 \text{ € por res}}$ , luego el mínimo se alcanza en el punto B, así que, para minimizar costes debemos comprar 0,5kg de maíz y 1,75kg de pienso cada día para cada res.

Para la segunda cuestión, como cambia la región factible, debemos de representar de nuevo el problema.

Nueva representación gráfica:



La nueva región factible conserva el punto  $A=(0,3)$  y  $B=(0,5,1,75)$ , pero el punto C pasa a valer  $(2,1)$ , pero el mínimo sigue correspondiendo al punto  $B=(0,5,1,75)$ .

¿Tenemos duda entre el punto B y C?

Esta duda se responde calculando el gasto en cada uno de estos puntos.

$$F(B) = 0,60 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,75 = 2,04 \text{ € por día y res.}$$

$$F(C) = 0,60 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2,20 \text{ € por día y res.}$$

### EJERCICIO C.3

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de kg del alimento I por animal y mes.

Y= Número de kg del alimento II por animal y mes.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Min } 20x + 15y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} 100x + 70y \geq 3900 \Rightarrow 10x + 7y \geq 390 & (1) \end{cases}$$

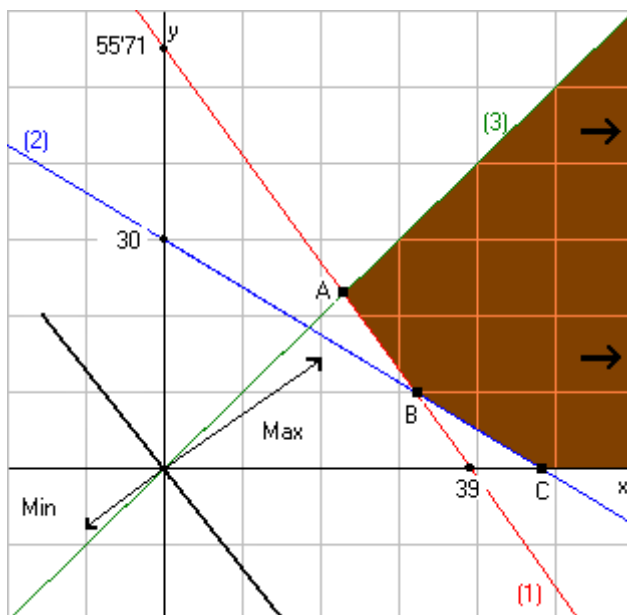
$$\begin{cases} 0.5x + 0.8y \geq 24 \Rightarrow 5x + 8y \geq 240 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq y & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La primera restricción es necesaria para cubrir las necesidades de calorías.
- La segunda restricción es necesaria para cubrir las necesidades de proteínas
- La tercera restricción se debe a la necesidad de comprar por los menos 10 kg del alimento II.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de kilogramos de cada uno de los alimentos no puede ser un número negativo.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} y = x \\ 10x + 7y = 390 \end{cases}$ , luego  $A = (390/17, 390/17)$

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 10x + 7y = 390 \\ 5x + 8y = 240 \end{cases}$ , luego  $B=(32,10)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} 5x + 8y = 240 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $C=(48,0)$ .

La recta representada en negro corresponde a la recta de nivel  $20x+15y=0$ , luego transportando paralelamente esta recta según la dirección y sentido del vector de decrecimiento a lo largo de la región factible encontramos la solución en el punto  **$B=(32,10)$** .

Si tenemos duda entre el punto B y el punto A, comparamos la recta de nivel y la recta (2), la pendiente de la recta de nivel es de  $m_1=-4/3=-1'333...$  y la pendiente de la recta (2) es de  $m_2=-10/7=-1'428...$  y ya obtenemos el resultado.

Otra forma de resolver la duda es comparar el gasto en A y en B.

$F(A) = 20 \cdot (390/17) + 15 \cdot (390/17) = 802'94...$  y  $F(B) = 20 \cdot 32 + 15 \cdot 10 = 790$ , luego el mínimo se alcanza en el punto B, comprando 32kg de alimento I y 10kg de alimento II.

## EJERCICIO D.1

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de coches del modelo A.

Y= Número de coches del modelo B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

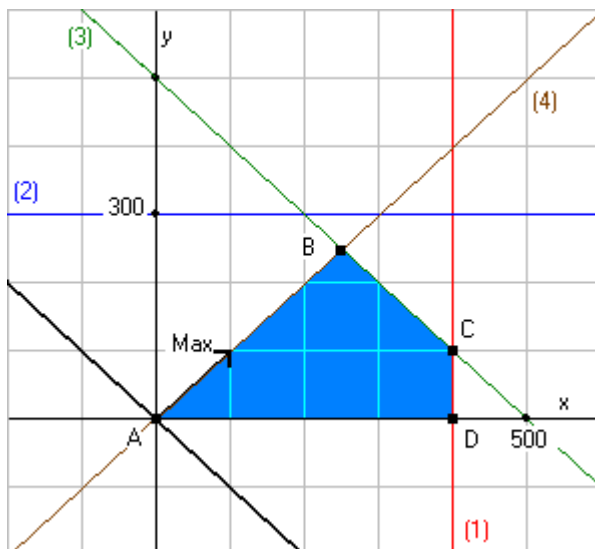
*Max*  $mx + my$

*sujeto a :*

$$\begin{cases} x \leq 400 & (1) \\ y \leq 300 & (2) \\ x + y \leq 500 & (3) \\ x \geq y & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La función objetivo está en función del parámetro m, ya que, no nos proporcionan el beneficio por la fabricación de cada coche.
- La primera desigualdad se debe a las limitaciones de fabricación del primer modelo de coche.
- La segunda se debe a las limitaciones de fabricación del segundo modelo.
- La tercera se debe a que la producción máxima es de 500 coches.
- La cuarta se debe a que se deben producir más o igual número de coches del modelo A que del B.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de coches no puede ser un número negativo(además debe ser un número entero).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

$$\text{Vértice A: intersección de las rectas } \begin{cases} y = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow A=(0,0).$$

$$\text{Vértice B: intersección de las rectas } \begin{cases} y = x \\ x + y = 500 \end{cases} \Rightarrow B=(250,250).$$

$$\text{Vértice C: intersección de las rectas } \begin{cases} x + y = 500 \\ x = 400 \end{cases} \Rightarrow C=(400,100).$$

$$\text{Vértice D: intersección de las rectas } \begin{cases} x = 400 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D=(400, 0).$$

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0€.$$

$$F(B) = m \cdot 250 + m \cdot 250 = \mathbf{500m \text{ €}}.$$

$$F(C) = m \cdot 400 + m \cdot 100 = \mathbf{500m \text{ €}}.$$

$$F(D) = m \cdot 400 + m \cdot 0 = 400m \text{ €}.$$

Luego se alcanzará el máximo en todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos **B y C**, con coordenadas enteras, obteniendo una ganancia de 500€ en dichos puntos. Dicha ganancia no la podremos saber concretamente, pero si sabemos que será 500 veces el beneficio por la fabricación de un único coche.

## EJERCICIO D.2

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de tartas del tipo T<sub>1</sub>.

Y= Número de tartas del tipo T<sub>2</sub>.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

Max  $2mx + my$

sujeto a :

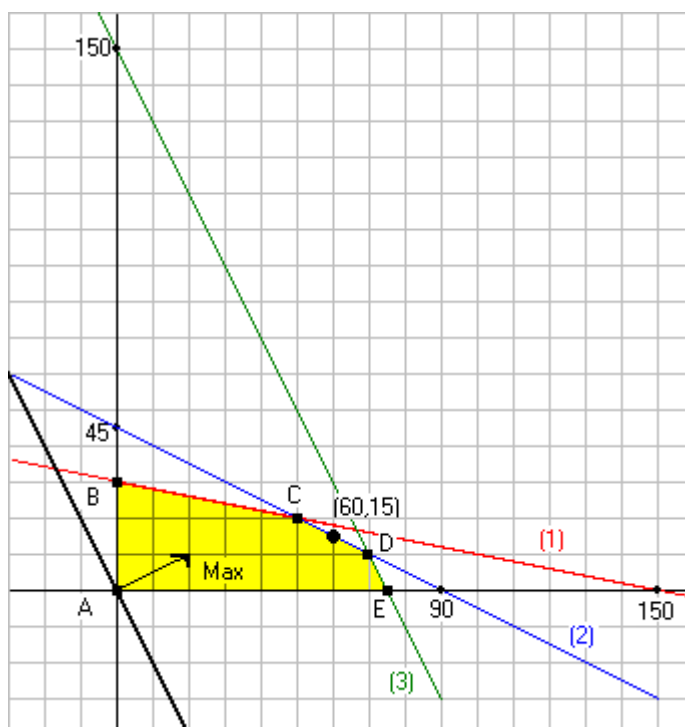
$$\begin{cases} x + 5y \leq 150 & (1) \\ x + 2y \leq 90 & (2) \\ 2x + y \leq 150 & (3) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La función objetivo está en función de m, debido a que no conocemos el beneficio que obtenemos por vender cada una de las tartas, sólo sabemos que el beneficio por una tarta del tipo T<sub>1</sub> es el doble que el beneficio por una tarta T<sub>2</sub>, por ello, asignamos 2m al beneficio de las tartas del primer tipo y m a las tartas del segundo tipo.

- Las tres primeras desigualdades se deben a las limitaciones de los ingredientes A, B y C respectivamente.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de tartas elaboradas no puede ser un número negativo(además debe ser un número entero).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 5y = 150 \\ x = 0 \end{cases}$ , luego  $B=(0,30)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 5y = 150 \\ x + 2y = 90 \end{cases}$ , luego  $C=(50,20)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + 2y = 90 \\ 2x + y = 150 \end{cases}$ , luego  $D=(70,10)$ .

Vértice E: intersección de las rectas  $\begin{cases} 2x + y = 150 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $E=(75,0)$

a)

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 2m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 2m \cdot 0 + m \cdot 30 = 30m \text{ €}.$$

$$F(C) = 2m \cdot 50 + m \cdot 20 = 120m \text{ €}.$$

$$F(D) = 2m \cdot 70 + m \cdot 10 = \mathbf{150m \text{ €}}.$$

$$F(E) = 2m \cdot 75 + m \cdot 0 = \mathbf{150m \text{ €}}.$$

Luego, la solución la encontramos en todos los puntos del segmento comprendido entre los puntos **D y E**, con coordenadas enteras, ya que, para vender una tarta debemos elaborarla entera y no parte de ella. El beneficio para dicho máximo no se conoce pero si se sabe que será 150 veces el beneficio de una tarta del tipo  $T_2$ .

También podemos llegar a esta solución transportando paralelamente la recta de nivel (en negro) según la dirección y sentido del vector de crecimiento.

### **EJERCICIO D.3**

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de locomotoras de A que prestan servicio a la estación N.

Y= Número de locomotoras de B que prestan servicio a la estación S.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

En principio, en este problema tendríamos 6 incógnitas, pero todos los problemas de programación lineal vistos hasta ahora tienen dos incógnitas, luego vamos a remitir las otras cuatro incógnitas a x e y.

Número de locomotoras de A que prestan servicio a la estación S será  $9-x$ .

Número de locomotoras de B que prestan servicio a la estación N será  $10-y$ .

Número de locomotoras de C que prestan servicio a la estación N ser

$11-x-(10-y)=1-x+y$ .

Número de locomotoras de C que prestan servicio a la estación S será  $15-(9-x)-y=6+x-y$

$$\text{Min } 6x + 20y + 4(9 - x) + 15(10 - y) + 3(1 - x + y) + 5(6 + x - y) = 4x + 3y + 219$$

sujeto a :

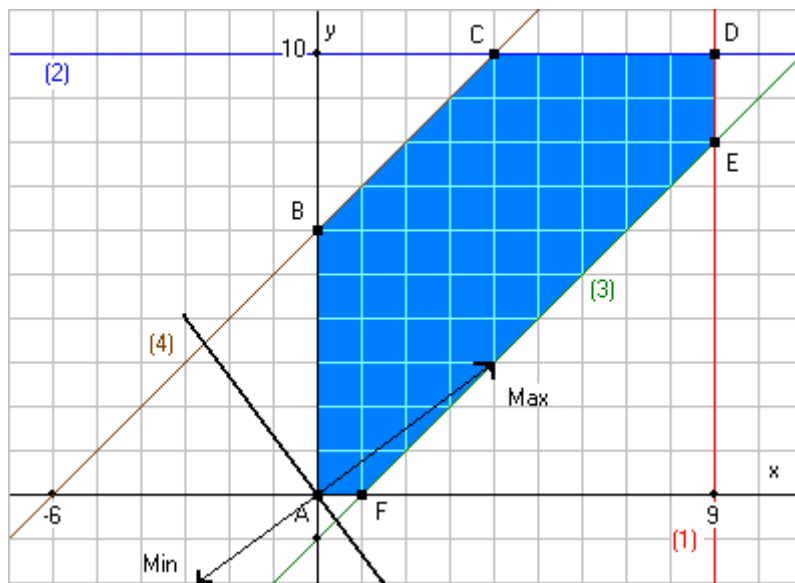
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 9 & (1) \\ 0 \leq y \leq 10 & (2) \\ x + (10 - y) \leq 11 \Rightarrow x - y \leq 1 & (3) \\ (9 - x) + y \leq 15 \Rightarrow y - x \leq 6 & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La función objetivo recoge independientemente el número de locomotoras de cada tipo que van a prestar servicio a cada estación, multiplicadas por el coste correspondiente. Para maximizar esta función objetivo se puede prescindir de 219 y obtendremos el mismo resultado.

- (1) se debe a que el número de loc. de A no puede ser mayor de 9, ya que, sólo hay 9 locomotoras de tipo A. Con (2) ocurre exactamente lo mismo pero con las locomotoras de tipo B.

- (3) se debe a que el número de locomotoras de A y B que se destinan a N no puede ser mayor de 11, ya que, a N se destinan un total de 11 locomotoras de los tipos A, B y C. Con (4) ocurre exactamente lo mismo pero con la estación S.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán:  $A=(0,0)$ ,  $B=(0,6)$ ,  $C=(4,10)$ ,  $D=(9,10)$ ,  $E=(9,8)$ ,  $F=(1,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la busquemos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 219 = 219 \text{ €}.$$

$$F(B) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 219 = 237 \text{ €}.$$

$$F(C) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 219 = 265 \text{ €}.$$

$$F(D) = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 219 = 285 \text{ €}.$$

$$F(E) = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 219 = 279 \text{ €}.$$

$$F(F) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 219 = 223 \text{ €}.$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **A**. Así que, se deberán destinar:

- Ninguna locomotora de A a la estación N.
- $9 - 0 = 9$  locomotoras de A a la estación S.
- Ninguna locomotora de B a la estación S.
- $10 - 0 = 10$  locomotoras de B a la estación N.
- $11 - 0 - (10 - 0) = 1$  locomotora de C a la estación N.
- $15 - (9 - 0) - 0 = 6$  locomotoras de C a la estación S.

## EJERCICIO D.4

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de hectáreas de la variedad A.

Y= Número de hectáreas de la variedad B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

$$\text{Max } 9600x + 7500y - 12 \cdot 80x - 12 \cdot 60y = 8640x + 6780y$$

sujeto a :

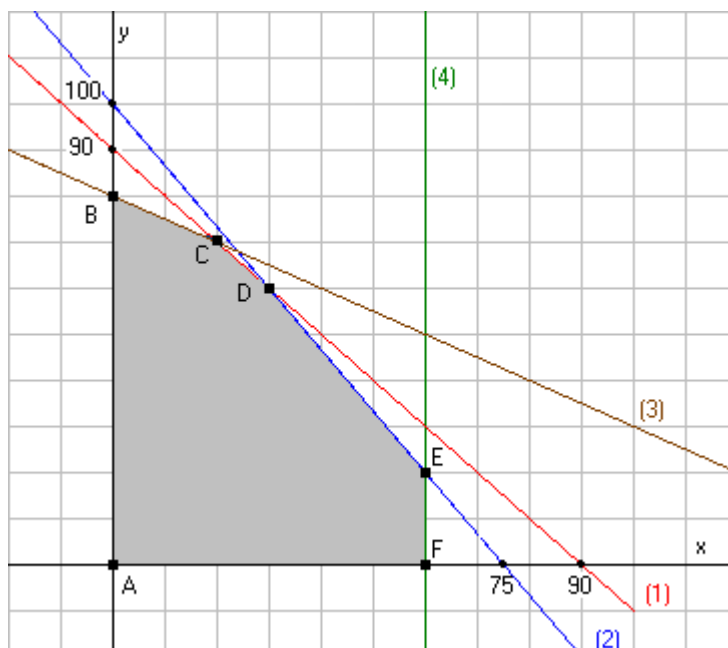
$$\begin{cases} x + y \leq 90 & (1) \\ 80x + 60y \leq 6000 \Rightarrow 4x + 3y \leq 300 & (2) \\ 2x + 4y \leq 320 & (3) \\ x \leq 60 & (4) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- La función objetivo tiene en cuenta los 9600 € y 7500 € de ganancia por hectárea de cada clase respectivamente, pero también se ha de tener en cuenta el gasto por mano de obra que se produce  $(-12 \cdot 80x - 12 \cdot 60y)$ .

- (1) se debe a las limitaciones de terreno.  
- (2) se debe a las limitaciones de mano de obra.  
- (3) se debe a las limitaciones de tiempo de la maquinaria.  
- (4) se debe a las limitaciones del Estado para plantar de la primera variedad de tabaco.

- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de hectáreas plantadas no puede ser un número negativo.

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} 2x + 4y = 320 \\ x = 0 \end{cases}$ , luego  $B=(0,80)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} 2x + 4y = 320 \\ x + y = 90 \end{cases}$ , luego  $C=(20,70)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 90 \\ 4x + 3y = 300 \end{cases}$ , luego  $D=(30,60)$ .

Vértice E: intersección de las rectas  $\begin{cases} 4x + 3y = 300 \\ x = 60 \end{cases}$ , luego  $D=(60,20)$ .

Vértice F: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 60 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego  $E=(60,0)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 8640 \cdot 0 + 6780 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 8640 \cdot 0 + 6780 \cdot 80 = 542400 \text{ €}.$$

$$F(C) = 8640 \cdot 20 + 6780 \cdot 70 = 647400 \text{ €}.$$

$$F(D) = 8640 \cdot 30 + 6780 \cdot 60 = \mathbf{666000 \text{ €}}.$$

$$F(E) = 8640 \cdot 60 + 6780 \cdot 20 = 654000 \text{ €}.$$

$$F(F) = 8640 \cdot 60 + 6780 \cdot 0 = 518400 \text{ €}.$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **D**. Así que, se deben plantar 30 hectáreas del tabaco de clase A y 60 hectáreas del tabaco de clase B, para obtener un beneficio de **666.000 €**.

## EJERCICIO D.5

Primer paso. Dar nombre a las incógnitas.

X= Número de acciones de la sociedad A.

Y= Número de acciones de la sociedad B.

Segundo paso. Plantear el problema atendiendo a los datos que nos proporcionan.

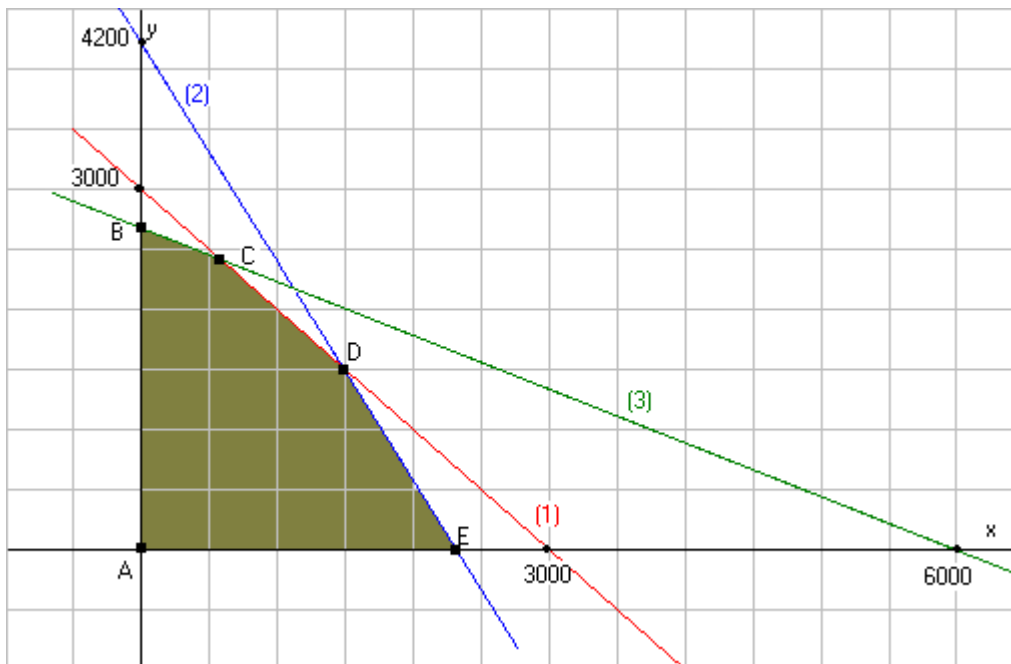
$$\text{Max } 1'2x + 1y$$

sujeto a :

$$\begin{cases} 10x + 10y \leq 30000 \Rightarrow x + y \leq 3000 & (1) \\ 0'45 \cdot 10x + 0'25 \cdot 10y \leq 0'35 \cdot 30000 \Rightarrow 45x + 25y \leq 105000 & (2) \\ 0'20 \cdot 10x + 0'45 \cdot 10y \leq 0'40 \cdot 30000 \Rightarrow 20x + 45y \leq 120000 & (3) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- (1) hace referencia a las limitaciones de dinero.
- (2) y (3) hacen referencia a las limitaciones de inversión en el sector inmobiliario e industrial respectivamente.
- Las dos últimas desigualdades son necesarias debido a que el número de acciones no puede ser un número negativo (además debe ser un número entero).

Representación gráfica:



Donde los vértices serán los siguientes:

Vértice A: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego,  $A=(0,0)$ .

Vértice B: intersección de las rectas  $\begin{cases} x = 0 \\ 20x + 45y = 120000 \end{cases}$ , luego,  $B=(0,8000/3)$ .

Vértice C: intersección de las rectas  $\begin{cases} 20x + 45y = 120000 \\ x + y = 3000 \end{cases}$ , luego,  $C=(600,2400)$ .

Vértice D: intersección de las rectas  $\begin{cases} x + y = 3000 \\ 45x + 25y = 105000 \end{cases}$ , luego,  $D=(1500,1500)$ .

Vértice E: intersección de las rectas  $\begin{cases} 45x + 25y = 105000 \\ y = 0 \end{cases}$ , luego,  $E=(7000/3)$ .

**Como la región factible es limitada, el problema tendrá solución y ésta, la buscamos en los vértices de dicha región.**

$$F(A) = 1'2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \text{ €}.$$

$$F(B) = 1'2 \cdot 0 + 1 \cdot (8000/3) = 2666'666 \text{ €}.$$

$$F(C) = 1'2 \cdot 600 + 1 \cdot 2400 = 3120 \text{ €}.$$

$$F(D) = 1'2 \cdot 1500 + 1 \cdot 1500 = \mathbf{3300 \text{ €}}.$$

$$F(E) = 1'2 \cdot (7000/3) + 1 \cdot 0 = 2800 \text{ €}.$$

Luego, la solución la encontramos en el vértice **D**. Luego tendremos que comprar 1500 acciones de la sociedad A y 1500 acciones de la sociedad B para obtener un beneficio de **3.300 €**.